Požadované dovednosti:

- práce s mocninami
- mnohočleny: sčítání, odečítání, násobení, dělení
- vzorce pro druhou a třetí mocninu dvojčlenu
- rozklad mnohočlenů na součin činitelů (vytýkáním nebo užitím vzorců)
- úprava algebraických výrazů, podmínky řešitelnosti
- řešení lineárních rovnic a nerovnic
- řešení kvadratických rovnic
- řešení rovnic s odmocninou
- řešení rovnic s parametrem
- řešení rovnic s absolutní hodnotou
- řešení exponenciálních a logaritmických rovnic

Mocniny

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{b^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Operace s mnohočleny

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin lineárních dvojčlenů

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

Usměrňování zlomků

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{a}{\sqrt[m]{a^n}} \cdot \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{a\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n+n}}} = \frac{a\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{a\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{c\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{a - b}$$

Rovnice s jednou neznámou

Řešit rovnici znamená určit taková čísla, pro která hodnota levé strany rovnice se rovná hodnotě pravé strany rovnice.
Každé takové číslo se nazývá kořen rovnice nebo řešení rovnice.
Při řešení rovnice lze použít tzv. **ekvivalentní úpravy** (nedochází ke změně kořenů rovnice)**:**

- přičtení, odečtení téhož čísla nebo výrazu s proměnnou k oběma stranám rovnice
- vynásobení, vydělení obou stran rovnice stejným číslem nebo výrazem neznámou, který se nerovná nule

nebo **tzv. důsledkové úpravy** (řešením rovnice jsou nejenom všechna původní rovnice, ale i některá další řešení)

- Umocnění obou stran rovnice na druhou

Při řešení rovnice je vhodné provádět zkoušku

- Při řešení použitím důsledkových úprav
- Pro vyloučení chyby při výpočtu
- Zkouškou nelze zjistit zda, jsme nalezli všechna řešení!

Nerovnice s jednou neznámou

Zápis nerovnosti dvou výrazů, v nichž se může vyskytovat nějaké písmeno označující neznámou. Od rovnic se liší tím, že místo znaku rovnosti je v nich některý ze znaků nerovnosti - <, ≤, >, ≥.
Řešením nerovnice nazýváme každé číslo, jehož dosazením za neznámou dostaneme platnou rovnost.
Při řešení rovnice používáme **tzv. ekvivalentní úpravy**.

- Přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice
- Vynásobení obou stran rovnice stejným číslem
- Při násobení záporným číslem dochází k obracení znaku nerovnosti!

Lineární rovnice

$$ax + b = 0$$

kde $a,b \in R$, se nazývá **lineární rovnice** s neznámou x

$a \neq 0, pak\ jediným\ řešením\ je\ x = -\frac{b}{a}$

$a = 0\ b = 0, pak\ každé\ číslo\ x \in \mathbb{R}\ je\ řešením$

$a = 0\ b \neq 0, pak\ rovnice\ nemá\ řešení$

Lineární nerovnice

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$$

kde $a,b \in R$, se nazývá **lineární nerovnice** s neznámou x

$$ax + b > 0$$

$a > 0, pak\ jediným\ řešením\ je\ x > -\frac{b}{a}$

$a < 0, pak\ jediným\ řešením\ je\ x < -\frac{b}{a}$

$a = 0\ b = 0, pak\ každé\ číslo\ x \in \mathbb{R}\ je\ řešením$

$a = 0\ b \neq 0, pak\ rovnice\ nemá\ řešení$

Kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kde $a,b,c \in R$, $a \neq 0$ se nazývá **kvadratická rovnice** s neznámou x

$D < 0,$ *nemá rovnice v* $\mathbb{R}$ *žádné řešení*

$D = 0,$ *má rovnice jeden dvojnásobný kořen*

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$D > 0,$ *pak rovnice má dva různé reálné kořeny*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, D = b^2 - 4ac$$

Viétovy vztahy

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Rovnice s neznámou pod odmocninou

Řešíme pomocí umocnění obou stran na druhou (zkouška!).

Rovnice s parametrem

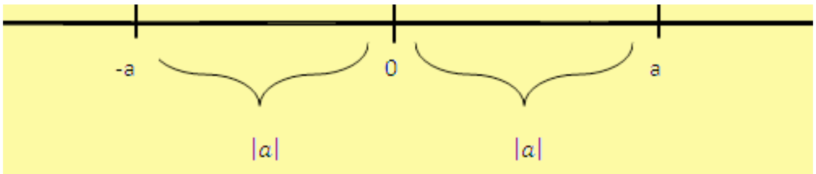
Členy s neznámou převedeme na jednu stranu rovnice, ostatní na druhou, poté neznámou vytkneme a provedeme diskuzi o výrazu, kterým chceme dělit (nelze dělit 0).
Kvadratické rovnice s parametrem
Všechny členy převedeme na jednu stranu rovnice, na druhé zůstane 0. Určíme koeficienty a, b, c a spočítáme diskriminant. Jestliže

- $D = 0$ 1 řešení, určíme parametr, pro který se diskriminant rovná nule a dopočítáme kořen
- $D > 0$ 2 řešení, určíme interval pro parametr a dopočítáme kořeny,
- $D < 0$ žádné řešení, vypočítáme interval pro parametr

Rovnice s absolutní hodnotou

$Absolutní\ hodnota\ čísla\ a \in \mathbb{R}\ je\ definována$:

$$|a| = a\ pro\ a \geq 0, |a| = -a\ pro\ a < 0$$



1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = |-a|$

3. $|ab| = |a||b|$

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ pokud\ b \neq 0$

Nejprve určíme tzv. **nulové body** všech absolutních hodnot, tzn. takové hodnoty proměnné, pro které je aspoň jedna absolutní hodnota nulová. Nulové body rozdělují reálnou osu na disjunktní intervaly. V každém z těchto intervalů má argument každé absolutní hodnoty jednoznačně definované znaménko. Buď je argument kladný, pak absolutní hodnotu nahradíme přímo jejím argumentem, nebo záporný, pak absolutní hodnotu nahradíme záporně vzatým argumentem, podle definice absolutní hodnoty. Takto se zbavíme všech absolutních hodnot a dostaneme (ne)rovnici bez absolutních hodnot, kterou řešíme vhodnou metodou podle jejího typu. Získáme tak řešení, které v průniku s aktuálním intervalem, dává část celkového řešení. Celkové řešení je pak sjednocením všech dílčích řešení pro jednotlivé disjunktní intervaly.

Exponenciální a logaritmické rovnice

Základní vlastnosti mocnin

Pro každé $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ platí:
$a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
$(a^x)^y = a^{xy}$; $a^x = a^y \Rightarrow (a = 1 \vee x = y)$

Poznámka 15. Číslo $x = \log_a y$ definujeme vztahem $a^x = y$, přitom $a > 0, a \neq 1, y > 0$. Místo $\log_{10}$ píšeme pouze log (jedná se o dekadický logaritmus), místo $\log_e$ píšeme ln (jedná se o přirozený logaritmus).

Základní vlastnosti logaritmů

Pro každé $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; x, y \in \mathbb{R}^+; k \in \mathbb{R}$ platí:
$a)\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
$b)\ \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
$c)\ \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$
$d)\ \log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$
$e)\ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
$f)\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Řešení exponenciálních rovnic

Obecná metoda řešení neexistuje, záleží na konkrétním zadání. Často je výhodný následující postup:

- Vhodnými úpravami rovnici převedeme na tvar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.
- Logaritmujeme rovnici při základu *a*, čímž dostaneme rovnici $f(x) = g(x)$.
- Získanou rovnici vyřešíme.
- Zkouškou a porovnáním s definičním oborem vyloučíme neplatné kořeny, vzniklé neekvivalentními úpravami.

Obecně lze říci, že postup řešení musí nutně v některém kroku obsahovat logaritmování.

Řešení logaritmických rovnice

Obecná metoda řešení neexistuje, záleží na konkrétním zadání. Často je výhodný následující postup:

- Vhodnými úpravami rovnici převedeme na tvar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.
- Odlogaritmujeme rovnici při základu *a*, dostaneme rovnici $f(x) = g(x)$.
- Získanou rovnici vyřešíme.
- Zkouškou a porovnáním s definičním oborem vyloučíme neplatné kořeny, vzniklé důsledkovými neekvivalentními úpravami.

Opět lze obecně říci, že postup řešení musí v některém kroku obsahovat odlogaritmování.