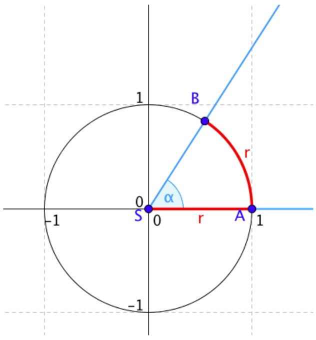
Požadované dovednosti:

- oblouková míra úhlu, orientovaný úhel
- definice goniometrických funkcí – jednotková kružnice, pravoúhlý trojúhelník
- základní vlastnosti goniometrických funkcí
- grafy goniometrických funkcí
- goniometrické rovnice

Oblouková míra úhlu

Radián (rad) je velikost středového úhlu, který přísluší oblouku kružnice, jehož délka je rovna poloměru kružnice.



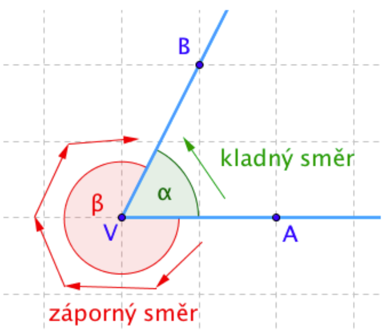
Jeden radián

- převod ze stupňů (deg) na radiány (rad)
- převod z radiánů na stupně

$$deg = rad \cdot \frac{180}{\pi}$$

Orientovaný úhel

Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. První z těchto polopřímek nazýváme počátečním ramenem orientovaného úhlu a druhou koncovým ramenem orientovaného úhlu. Společný počátek obou ramen se nazývá vrchol orientovaného úhlu.

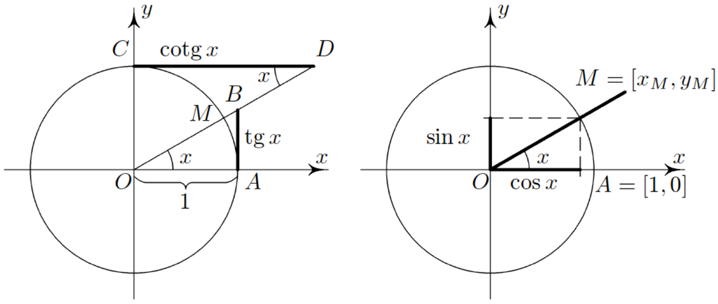


- orientovaný úhel $\widehat{AVB}$; VA počáteční rameno, VB koncové rameno
- velikost orientovaného úhlu: každé reálné číslo tvaru $\alpha + 2k\pi$ (v míře obloukové), resp. každé reálné číslo $\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ (v míře stupňové)
- je-li $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0° \leq \alpha < 360°$ pak α se nazývá základní velikost orientovaného úhlu

Goniometrické funkce

Ke každému reálnému číslu x existuje právě jeden orientovaný úhel x (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je ve zvolené soustavě souřadnic v kladné poloose x, koncové rameno protne jednotkovou kružnici v bodě M $[x_M, y_M]$.

Goniometrické funkce jsou nyní definovány takto:



$$\sin x = y_M\,,\quad x \in \mathbf{R}; \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y_M}{x_M}\,,\quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\cos x = x_M\,,\quad x \in \mathbf{R}; \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{x_M}{y_M}\,,\quad x \neq k\pi, k \in Z$$

Goniometrické funkce jsou periodické: základní perioda T funkcí sinus a kosinus je rovna 2π a základní perioda funkcí tangens a kotangens je rovna π. To znamená, že platí:

$$\begin{aligned}
\sin(x + 2k\pi) &= \sin x\,, & &x \in \mathbf{R}\,,\ k \in \mathbf{Z},\\
\cos(x + 2k\pi) &= \cos x\,, & &x \in \mathbf{R}\,,\ k \in \mathbf{Z},\\
\operatorname{tg}(x + k\pi) &= \operatorname{tg} x\,, & &x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z},\\
\operatorname{cotg}(x + k\pi) &= \operatorname{cotg} x\,, & &x \neq k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Funkce sinus, tangens a kotangens jsou liché, zatímco funkce kosinus je sudá. To znamená, že platí:

$$\sin(-x) = -\sin x\,,\quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x\,,\quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x\,,\quad \cos(-x) = \cos x$$

Monotómie a znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech:

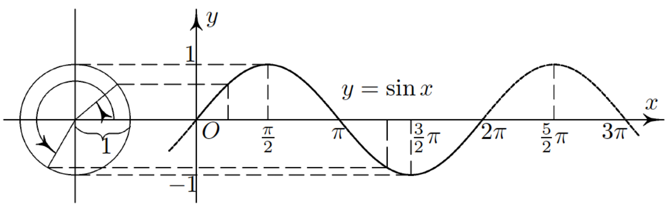
	Kvadrant			
	I	II	III	IV
$\sin x$	roste $+$	klesá $+$	klesá $-$	roste $-$
$\cos x$	klesá $+$	klesá $-$	roste $-$	roste $+$
$\operatorname{tg} x$	roste $+$	roste $-$	roste $+$	roste $-$
$\operatorname{cotg} x$	klesá $+$	klesá $-$	klesá $+$	klesá $-$
	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
	Interval			

Funkční hodnoty goniometrických funkcí pro některá x:

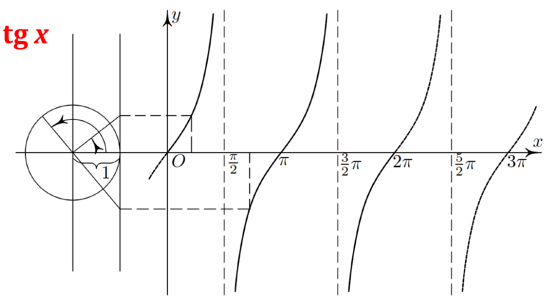
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$	0	$*$	0
$\operatorname{cotg} x$	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$*$	0	$*$

Grafy goniometrických funkcí:

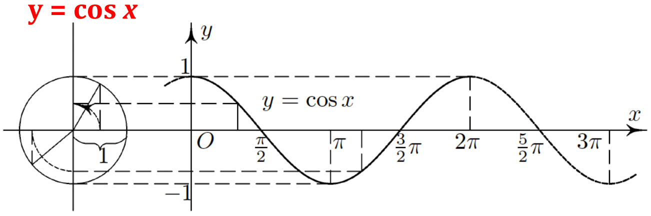
y = sin *x*



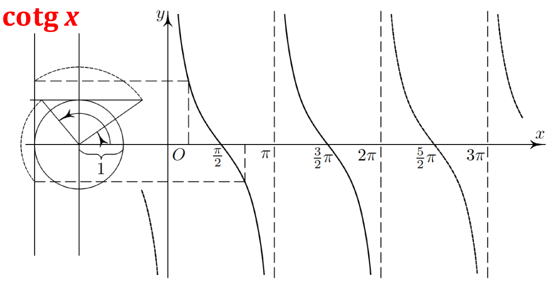
y = tg *x*



y = cos *x*



y = cotg *x*



Vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$
$$\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$