



Požadované dovednosti:

- lineární funkce
- kvadratická funkce
- mocniná funkce
- funkce s absolutní hodnotou
- lineárně lomená funkce
- exponenciální a logaritmická funkce
- transformace grafu

Lineární funkce

Lineární funkcí se nazývá každá funkce $y = ax + b$, kde $a, b \in R$.

Grafem lineární funkce je přímka

Speciální případy lineární funkce:

- **konstantní funkce** je speciální případ lineární funkce pro $a = 0, b \in R$, tj. funkce $y = b$. Grafem je přímka rovnoběžná s osou x .
- **přímá úměrnost** je speciální případ lineární funkce pro $a \in R - \{0\}, b = 0$, tj. funkce $y = ax$. Grafem je přímka procházející počátkem.

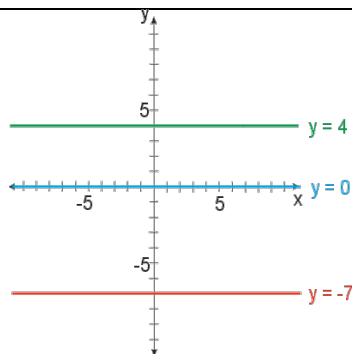
$$a = 0$$

$$H_f = \{b\}$$

Není prostá, a tedy není ani rostoucí, ani klesající

Je omezená

V každém $x \in R$ má maximum i minimum



$$a < 0$$

$$H_f = R$$

Je klesající v R . (je prostá)

Není ani shora ani zdola

omezená

Nemá ani maximum ani minimum

$$a > 0$$

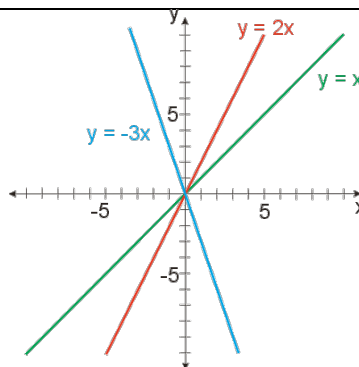
$$H_f = R$$

Je rostoucí v R . (je prostá)

Není ani shora ani zdola

omezená

Nemá ani maximum ani minimum



Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí se nazývá každá funkce

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ kde } a \in \mathbb{R} - \{0\}; b, c \in \mathbb{R}.$$

Grafem kvadratické funkce je parabola.

Je sudá.

$$a > 0$$

$$H_f = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty \right\rangle$$

Je rostoucí v intervalu $\left\langle -\frac{b}{2a}; +\infty \right\rangle$, klesající

v intervalu $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$

Je zdola omezená, není shora omezená

V bodě $x = -\frac{b}{2a}$ má ostré minimum

Funkce je konvexní

$$a < 0$$

$$H_f = \left(-\infty; c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

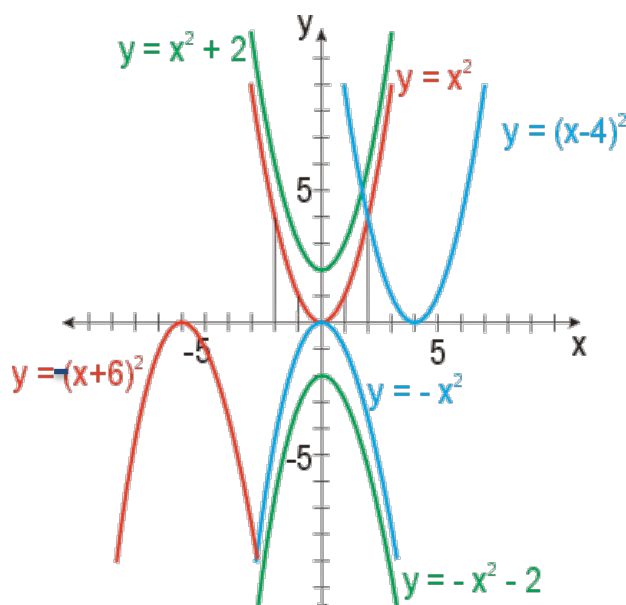
Je rostoucí v intervalu $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$,

klesající v intervalu $\left\langle -\frac{b}{2a}; +\infty \right\rangle$

Je shora omezená, není zdola omezená

V bodě $x = -\frac{b}{2a}$ má ostré maximum

Funkce je konkávní





Určení vrcholu paraboly:

$$V = [x_0, y_0]$$

$$\text{Výpočet } x\text{-ové souřadnice vrcholu: } x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$\text{Výpočet } y\text{-ové souřadnice vrcholu: } y_0 = f(x_0)$$

$$y = x^2 + 4x = \underbrace{x^2 + 4x}_{A^2 + 2AB + B^2} + \underbrace{2^2 - 2^2}_0 = [x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2] - 2^2 = (x + 2)^2 - 4$$
$$= A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

Doplnění na čtverec:

Určení průsečíku paraboly s osou y :

Průsečík s osou y má x -ovou souřadnici 0. y -ovou souřadnici získáme dosazením 0 do funkčního předpisu.

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Určení průsečíků paraboly s osou x :



Řešíme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$

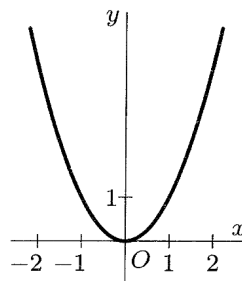
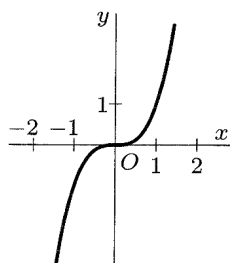
$$D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\text{Průsečíky: } P_1 = \left[\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, 0 \right] \quad P_2 = \left[\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, 0 \right]$$

Mocninná funkce

Mocninná funkce je dána ve tvaru $y = x^n$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) := x^n, n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$



n liché

$$D(f) = \mathbf{R}$$

$$H(f) = \mathbf{R}$$

Rostoucí v $D(f)$.

Lichá.

Není shora omezená, ani zdola omezená.

Nemá ani min, ani max.

Je prostá v $D(f)$.

n sudé

$$D(f) = \mathbf{R}$$

$$H(f) = \langle 0, +\infty \rangle$$

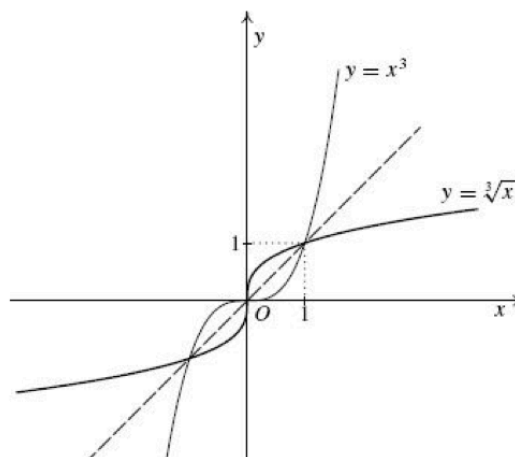
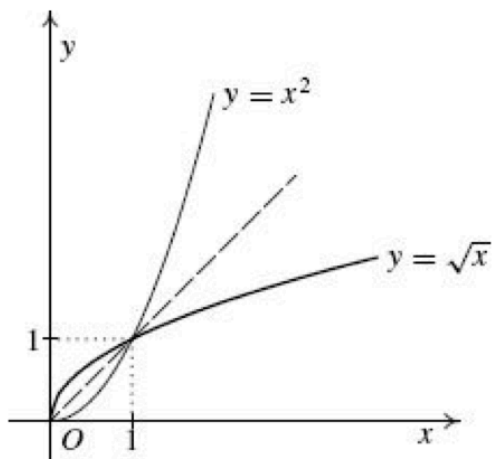
Klesající v $(-\infty, 0)$, rostoucí v $\langle 0, +\infty \rangle$.

Sudá.

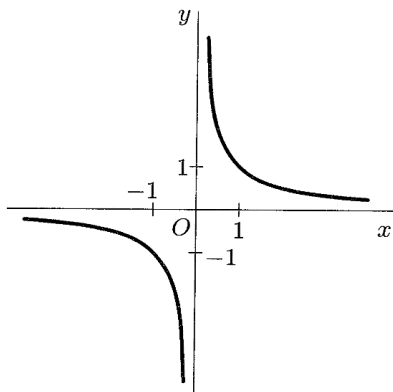
Není shora omezená, je zdola omezená.

V bodě 0 má min, nemá max.

Není prostá v $D(f)$.



$$f(x) := x^m, m \in \mathbf{Z}, m < 0.$$



OBR. 3

n liché

$$D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$$

$$H(f) = \mathbf{R} - \{0\}$$

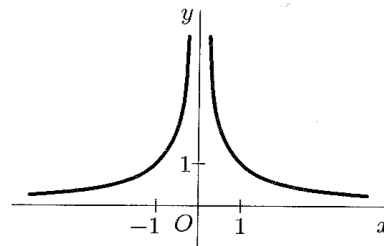
Klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$.

Lichá.

Není shora omezená, ani zdola omezená.

Nemá v žádném bodě ani minimum,
ani maximum.

Je prostá v $D(f)$.



OBR. 4

n sudé

Rostoucí v $(-\infty, 0)$, klesající v $(0, +\infty)$.

Sudá.

Není shora omezená, je zdola omezená.

Nemá v žádném bodě ani minimum,
ani maximum.

Není prostá v $D(f)$.



Funkce s absolutní hodnotou

Funkcí s absolutní hodnotou nazýváme funkci ve tvaru: $y = |x|$

Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo $|a|$, pro které platí:

je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$

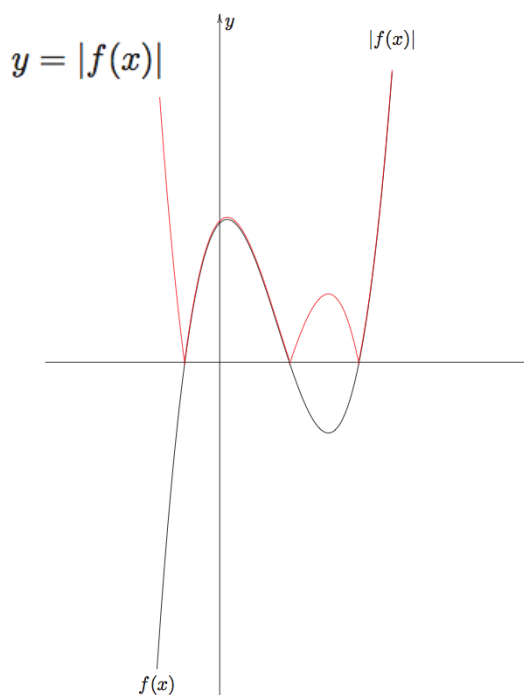
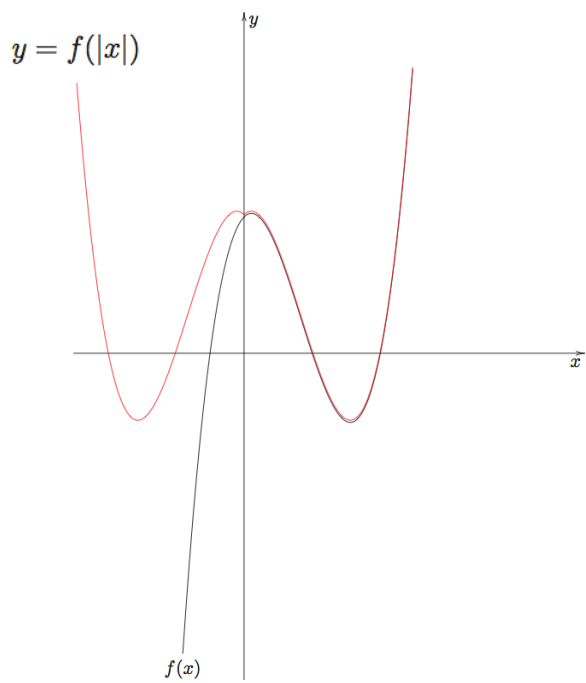
je-li $a < 0$, je $|a| = -a$

- pro každé $a \in \mathbb{R}$ je tedy $|a| \geq 0$

- je-li $a \neq 0$, pak je $|a| > 0$, $|0| = 0$

Postup při vytváření grafu:

- 1 absolutní hodnota
 - načrtneme graf funkce bez absolutní hodnoty a část funkce, která je pod osou x zobrazíme v osově souměrnosti (podle osy y) nad osu x
 - sestrojíme graf s uvedeným definičním oborem (intervalem)
- 2 a více absolutních hodnot
 - určíme nulové body a pomocí nich rozdělíme osu x na intervaly
 - v každém intervalu odstraníme absolutní hodnotu (dosazením bodu z daného intervalu: vyjde-li kladná hodnota, vnitřek absolutní hodnoty neměníme, vyjde-li záporná hodnota, v absolutní hodnotě obrátíme všechna znaménka) a upravíme
 - sestrojíme graf s uvedeným definičním oborem (intervalem)



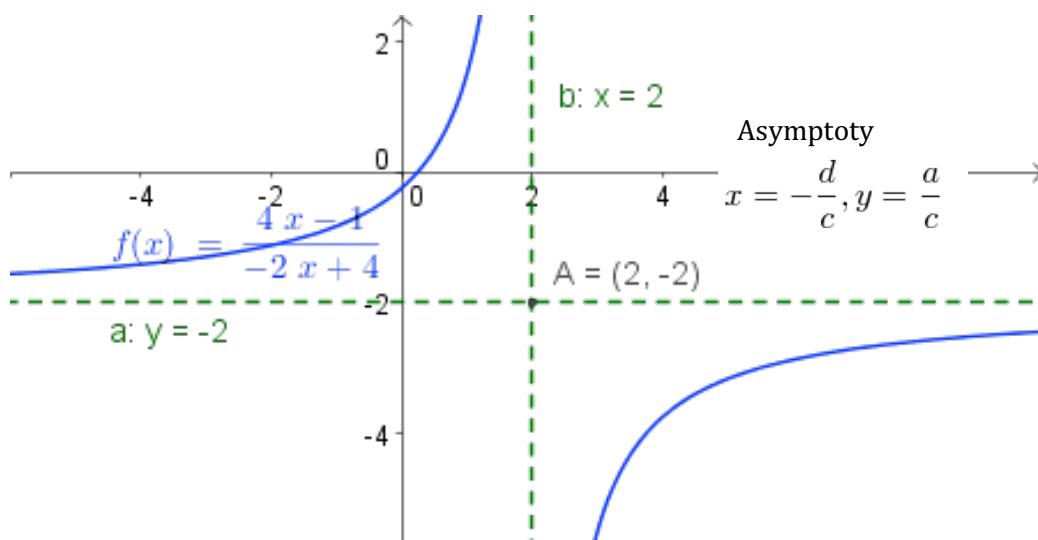
Lineárně lomená funkce

Lineárně lomenou funkcí rozumíme funkci ve tvaru $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $c \neq 0$,

$ad \neq bc$

Nakreslení grafu lineárně lomené funkce

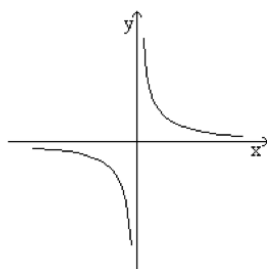
- Dělením čitatele jmenovatelem převedeme na tvar $y = \frac{k}{cx + d} + l$
- grafem každé lineární lomené funkce je **hyperbola**, jejíž asymptoty (tečny v nekonečnu) jsou přímky $y = l$ a $x = -d/c$



Grafem je hyperbola se středem v bodě $\left[\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right]$

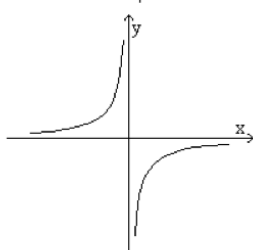
Zvláštním případem je **nepřímá úměrnost** - je dána ve tvaru $y = \frac{k}{x}$, kde $k \neq 0$

$k > 0$



$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
 $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
 lichá
 klesající
 prostá
 neomezená
 ani maximum, ani minimum

$k < 0$



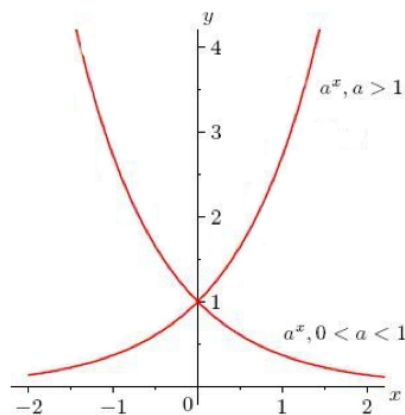
$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
 $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
 lichá
 rostoucí
 prostá
 neomezená
 ani maximum, ani minimum

Exponenciální a logaritmická funkce

Exponenciální funkce je dána ve tvaru: $y = a^x$

Je-li $a > 1$, je funkce rostoucí, je-li $0 < a < 1$, je funkce klesající

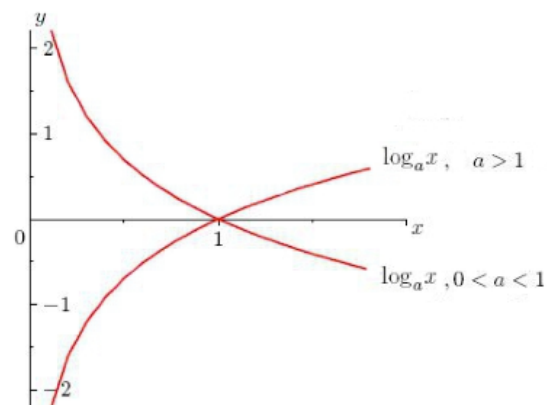
$a > 0, a \neq 1$ $D(f) = (-\infty, \infty)$ a $H(f) = (0, \infty)$



Logaritmická funkce je dána ve tvaru $y = \log_a x$, kde $a > 0$ a různé od 1

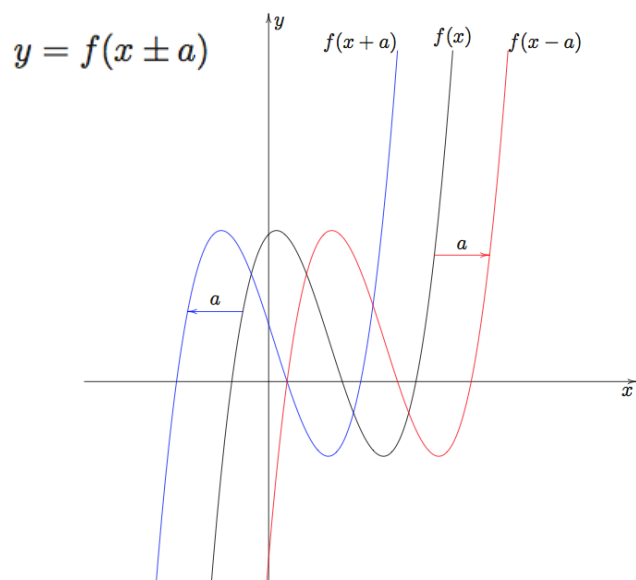
Je-li $a > 1$, je funkce rostoucí, je-li $0 < a < 1$, je funkce klesající

$D(f) = (0, \infty)$ a $H(f) = (-\infty; \infty)$

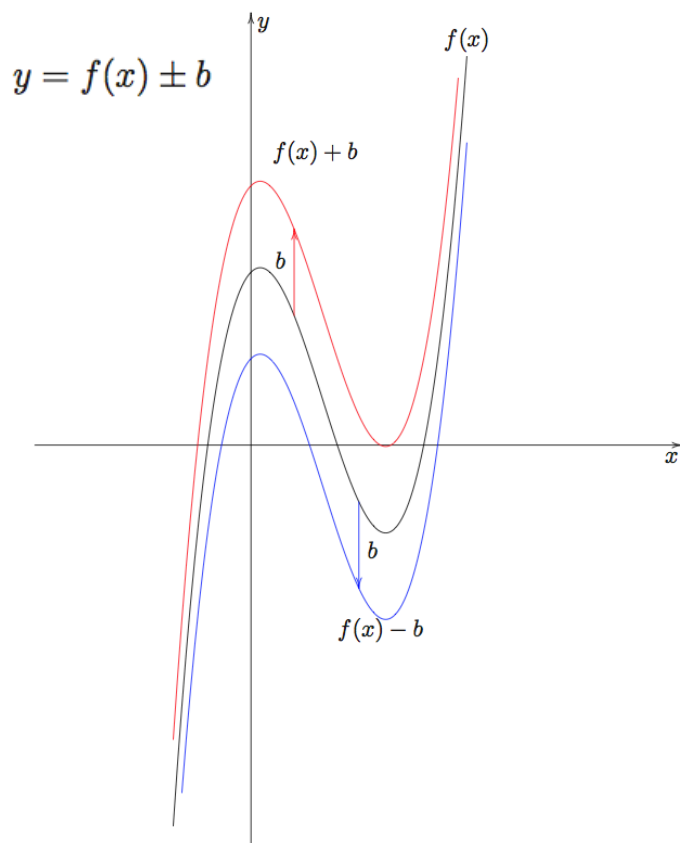


Transformace grafu

Posunutí ve směru osy x

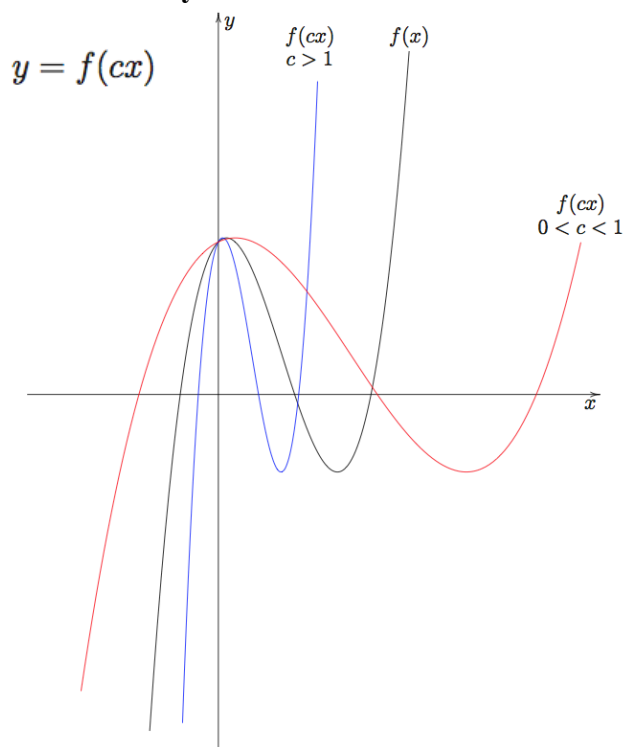


Posunutí ve směru osy y

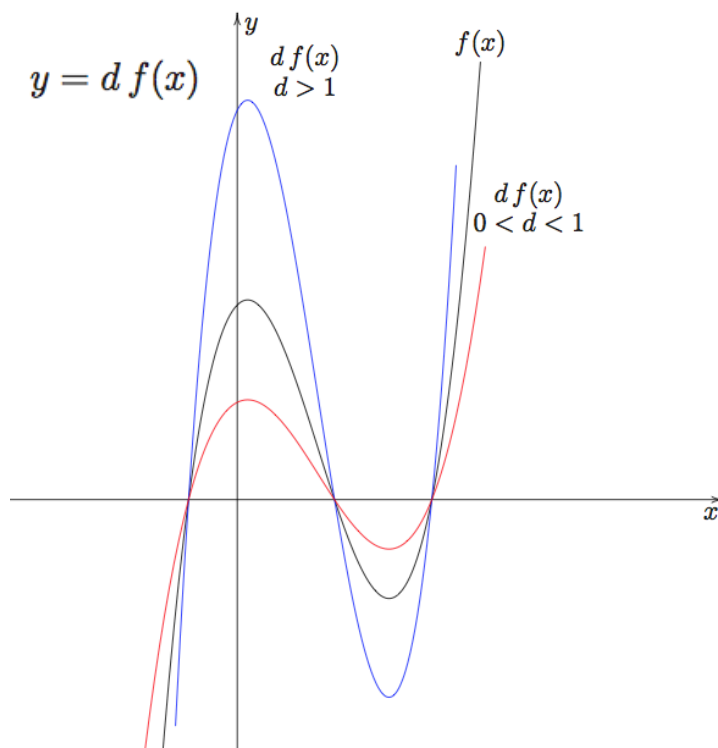




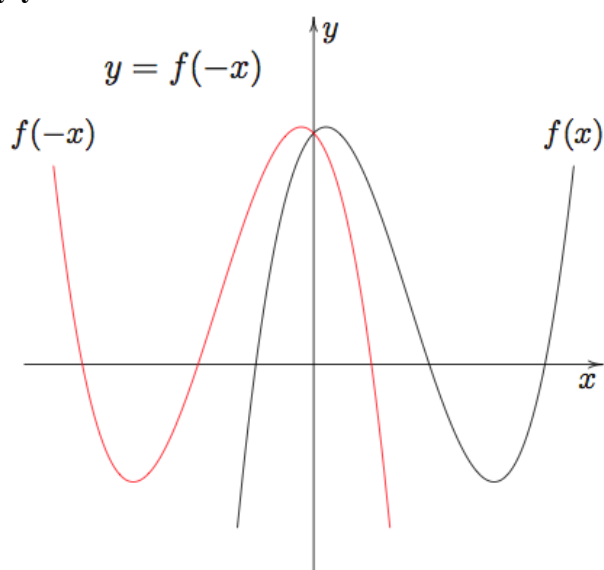
Kontrakce a dilatace ve směru osy x



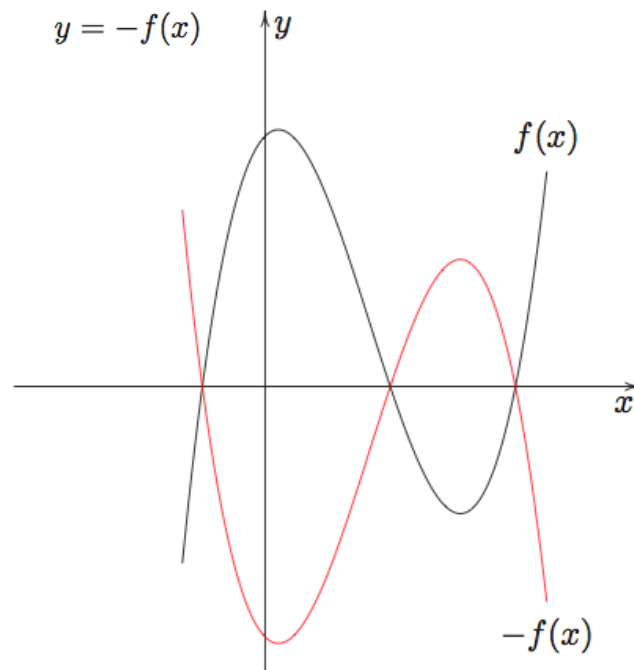
Kontrakce a dilatace ve směru osy y



Překlopení podél osy y



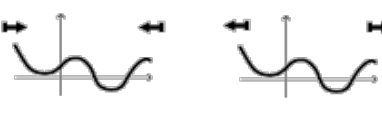
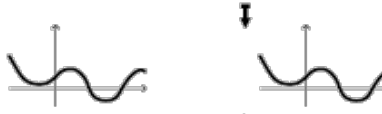
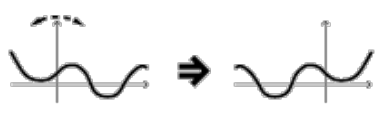
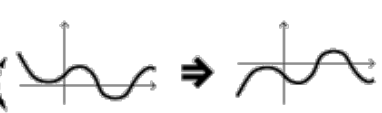
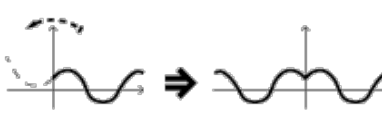


Překlopení podél osy x:



Souhrně:



transformace	cíl: argument	cíl: hodnota
posun o c $c > 0$	$x \mapsto x + c$ $x \mapsto x - c$ 	$f(x) \mapsto f(x) + c$ $f(x) \mapsto f(x) - c$ 
změna měřítka o c $c > 1$	$x \mapsto c \cdot x$ $x \mapsto \frac{x}{c}$ 	$f(x) \mapsto c \cdot f(x)$ $f(x) \mapsto \frac{f(x)}{c}$ 
překlopení	$x \mapsto -x$ 	$f(x) \mapsto -f(x)$ 
zrcadlení	$x \mapsto x $ 	$f(x) \mapsto f(x) $ 